Kapitel 11

Multivariate Verteilungen und Summen von Zufallsvariablen

Bisher hatten wir hauptsächlich unabhängige, identische verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ betrachtet, um Messreihen als Realisierungen von Zufallsvariablen zu modellieren.

Manchmal möchte man aber auch das Zusammenwirken mehrerer Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ untersuchen, die nicht unabhängig voneinander sind (z.B. Kursverläufe von Aktien). Wir betrachten nun die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ und beschäftigen uns auch mit der Frage, wie die Summe von Zufallsvariablen verteilt ist.

11.1 Grundlegende Definitionen

Wir haben bereits die gemeinsame Verteilungsfunktion von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ kennengelernt. Wir bauen nun auf dieser Definition auf.

Definition 11.1.1 *Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. Die* gemeinsame Verteilungsfunktion *von $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ist definiert durch*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Man nennt F auch die Verteilung des Zufallsvektors $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ heißt gemeinsame Dichte *von $X_1, \ldots, X_n$, wenn gilt*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f(s_1, \ldots, s_n)\, ds_1 \ldots ds_n \quad \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Der Vektor

$$\mu = (E(X_1), \ldots, E(X_n))^T$$

heißt (im Falle seiner Existenz) Erwartungswert(vektor) von $X = (X_1, \dots, X_n)^T$*. Die Matrix*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathit{Var}(X_1) & \mathit{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathit{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathit{Cov}(X_2, X_1) & \mathit{Var}(X_2) & \cdots & \mathit{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathit{Cov}(X_n, X_1) & & & \mathit{Var}(X_n) \end{pmatrix}$$

heißt (im Falle ihrer Existenz) Kovarianzmatrix *von* $X = (X_1, \dots, X_n)^T$.

Hierbei ist die Kovarianz *zweier Zufallsvariablen* X_i, X_j *definiert durch*

$$\mathit{Cov}(X_i, X_j) := E((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))),$$

sofern $\mathit{Var}(X_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Bemerkungen: $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ habe die gemeinsame Dichte $f(x_1, \dots, x_n)$.

- Es gilt

  $$F_i(x_i) = P(X_i \le x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(s_1, \dots, s_n)\, ds_1 \dots ds_{i-1} ds_{i+1} \dots ds_n}_{=f_i(s_i)}\, ds_i.$$

  und somit

  $$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i)\, dx_i = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_i\, f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

  sowie

  $$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - E(X_i))(x_j - E(X_j))\, f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

  Offensichtlich ist $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Cov}(X_i, X_i)$.

- Man zeigt leicht, dass

  $$P(a_1 \le X_1 \le b_1, \dots, a_n \le X_n \le b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(s_1, \dots, s_n)\, ds_1 \dots ds_n.$$

Beispiel: Die multivariate Normalverteilung

Die wichtigste multivariate Verteilung ist die multivariate Normalverteilung $N_n(\mu, \Sigma)$: Sei $X = 1 + (X_1, \dots, X_n)^T$ ein Vektor von normalverteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert $\mu = (E(X_1), \dots, E(X_n))^T$ und Kovarianzmatrix Σ, dann besitzt die multivariate Normalverteilung die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Im Fall von Unabhängigkeit ist die gemeinsame Dichte das Produkt der Einzeldichten:

Satz 11.1.2 *Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$. Dann hat $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ die gemeinsame Dichte*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n). \tag{11.1}$$

Hat umgekehrt $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ eine gemeinsame Dichte mit der Produktdarstellung (11.1)*, dann sind $X_1, ..., X_n$ unabhängig.*

Definition 11.1.3 *Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit Var$(X_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, heißen* paarweise unkorreliert, *wenn gilt*

$$\textit{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \textit{für alle } i \neq j.$$

Unabhängigkeit hat paarweise Unkorreliertheit zur Folge:

Satz 11.1.4 *Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Var$(X_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Dann gilt*

$$\textit{Cov}(X_i, X_j) = 0 \quad \textit{für alle } i \neq j.$$

Für gemeinsam normalverteilte Zufallsvariablen sind Unabhängigkeit und paarweise Unkorreliertheit sogar äquivalent.

Lemma 11.1.5 *$X = (X_1, \dots, X_n)^T$ sei $N_n(\mu, \Sigma)$-verteilt. Dann sind $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig, wenn sie paarweise unkorreliert sind.*

Beweis: Wegen Satz 11.1.4 ist nur zu zeigen, dass aus paarweiser Unkorreliertheit die Unabhängigkeit folgt. Sind $X_1, \dots, X_n$ paarweise unkorreliert, dann gilt $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$ und daher lautet die gemeinsame Dichte

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$$

mit

$$f_i(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i})^2}.$$

Also sind $X_1, \dots, X_n$ unabhängig nach Satz 11.1.2. □

11.2 Verteilung der Summe von Zufallsvariablen

Seien X_1, X_2 unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$. Wie sieht die Dichte von $X_1 + X_2$ aus? Wir benötigen die folgende Definition.

Definition 11.2.1 *Falls für die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Integral*

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

für alle x existiert, dann heißt $f * g$ die Faltung *von f und g.*

Dann gilt

Satz 11.2.2 *Seien X_1, X_2 unabhängige stetige Zufallsvariablen mit Dichten $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$. Dann hat $X_1 + X_2$ die Dichte $f * g$.*

Damit läßt sich zeigen:

Satz 11.2.3 *Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die $N(\mu_i, \sigma_i^2)$-verteilt sind. Dann ist $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

Im Fall diskreter Zufallsvariablen gibt es analoge Aussagen.

Definition 11.2.4 *Für $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $g = (g_i)_{i \in Z}$ ist die diskrete Faltung von f und g definiert durch*

$$(f * g)_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} g_j.$$

Analog zu Satz 11.2.3 gilt nun

Satz 11.2.5 *Seien X_1, X_2 unabhängige diskrete, $\mathbb{Z}$-wertige und setze $f_{X_1} := (P(X_1 = i))_{i \in \mathbb{Z}}$, $f_{X_2} := (P(X_2 = i))_{i \in \mathbb{Z}}$. Dann ist $f_{X_1 + X_2} := (P(X_1 + X_2 = i))_{i \in \mathbb{Z}}$ gegeben durch*

$$f_{X_1 + X_2} = f_{X_1} * f_{X_2}.$$

Als Anwendung erhält man z.B.

Satz 11.2.6 *Seien X_1, X_2 unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ_1 bzw. λ_2. Dann ist $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$*

Beispiel: Beim radioaktiven Zerfall einer Substanz werden ionisierende Teilchen frei. Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr zählt man die innerhalb einer Minute eintreffenden Teilchen. Deren Anzahl ist Poisson-verteilt. Hat man zwei radioaktive Substanzen mit Poisson-Verteilungen zu Parametern λ_1 und λ_2, so genügt die Gesamtheit der pro Zeitintervall produzierten Teilchen einer Poisson-Verteilungen zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.